بنام خدا

ماخ

جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

دفترچه سوالات به همراه پاسخنامه تشریحی
مرحله دوم
بیست و نهمین دوره‌ی المپیاد ریاضی سال ۱۳۹۰

مدت آزمون (دقیقه)	تعداد سوالات	
	مساله‌های کوتاه	چند گزینه‌ای
–	۶	–

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب ممنوع است.

۱. کد برگه سوالات شما **۱** است. این کد را در محل مربوط روی پاسخ نامه بزنید، **در غیر این صورت پاسخ نامه‌ی شما تصحیح نخواهد شد.** توجه داشته باشید کد برگه‌ی سولات شما در بالای هر یک از صفحه‌های این دفترچه نوشته شده است. با کد اصلی که در همین صفحه است یکی باشد.

۲. بلافاصله پس از آغاز آزمون تعداد سوالات داخل دفترچه و وجود همه‌ی برگه‌های دفترچه‌ی سولات را بررسی نمایید. در صورت وجود هر گونه نقصی در دفترچه، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۳. یک برگ پاسخ‌نامه در اختیار شما قرار گرفته که مشخصات شما بر روی آن نوشته شده است در صورت نادرست بودن آن، در اسرع وقت مسئول جلسه را مطلع کنید.

۴. برگه‌ی پاسخ‌نامه را دستگاه تصحیح می‌کند، پس آن را تا نکنید و تمیز نگه دارید و به علاوه، پاسخ هر پرسش را با **مداد مشکی نرم** در محل مربوط علامت بزنید. لطفا خانه‌ی مورد نظر را کاملاً سیاه کنید.

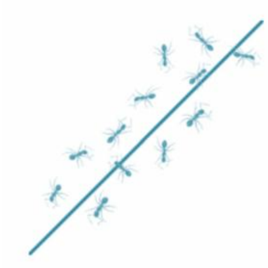
۵. در سوال‌های **چهار گزینه‌ای** به هر پاسخ درست ۳ نمره‌ی مثبت و به هر پاسخ نادرست یک نمره‌ی منفی تعلق می‌گیرد. در **مساله‌های کوتاه** به هر پاسخ درست ۸ نمره مثبت تعلق می‌گیرد و پاسخ نادرست نمره‌ی منفی ندارد.

۶. همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی نظیر تلفن همراه و لپ‌تاپ ممنوع است. همراه داشتن این قبیل وسایل حتی اگر از آن استفاده نکنید یا خاموش باشد، تقلب محسوب خواهد شد.

۷. آزمون مرحله‌ی دوم برای دانش‌آموزان سال اول و دوم دبیرستان **صرفاً جنبه‌ی آزمایشی و آمادگی** دارد و شرکت‌کنندگان در دوره‌ی تابستانی از بین دانش‌آموزان سال سوم دبیرستان انتخاب می‌شود.

۸. داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سوالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته‌اند، **در غیر این صورت دفترچه باید همراه پاسخ‌نامه تحویل داده شود.**

۱- ۱۳۹۰مورچه روی زمین در اطراف یک خط راست طوری قرار گرفته‌اند که فاصله‌ی سر هر کدام تا خط کم‌تر از یک سانتی‌متر است. ثابت کنید اگر فاصله‌ی سر هر دو مورچه بیش‌تر از دو سانتی‌متر باشد فاصله‌ی سر دست‌کم دو مورچه بیش‌تر از ده متر است. (فرض کنید سر هر مورچه یک نقطه‌ی است!)



۲- در مثلث ABC داریم $\angle ABC = ۶۰^\circ$. از رأس B عمودی بر ضلع AB رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle BAC$ را در نقطه‌ی D قطع کند. هم‌چنین از رأس C عمودی بر ضلع BC رسم می‌کنیم تا نیم‌ساز زاویه‌ی $\angle ABC$ را در نقطه‌ی E قطع کند. ثابت کنید $\angle BED \leq ۳۰^\circ$.

۳- همه‌ی دنباله‌های صعودی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ از اعداد طبیعی را بیابید که برای هر $i, j \in \mathbb{N}$، تعداد مقسوم‌علیه‌های $i+j$ با تعداد مقسوم‌علیه‌های $a_i + a_j$ برابر باشد. (صعودی بودن دنباله یعنی اگر $i \leq j$ آنگاه $a_i \leq a_j$).

۴- کوچک‌ترین عدد طبیعی n را بیابید که n عدد حقیقی در بازه‌ی $(-۱,۱)$ وجود داشته باشند که مجموع آن‌ها صفر و مجموع مربع‌های آن‌ها ۲۰ باشد.

۵- رنگین‌کمان نام پرنده‌ای کمیاب است. این پرنده زیبا می‌تواند به n رنگ مختلف درآید و هر روز رنگی متفاوت از روز قبل دارد. دانشمندان حقیقت جدیدی درباره این پرنده کشف کرده‌اند: هیچ چهار روزی در طول عمر این پرنده وجود ندارد مثل روزهای i، jام، kام و lام، که $i < j < k < l$ و این پرنده در روزهای p آم، iو kام نیز هم‌رنگ به رنگی متفاوت از روزهای iام و lام باشد. حداکثر طول عمر این پرنده برحسب n چند روز است؟

۶- اضلاع AB و AC از مثلث ABC را به ترتیب از طرف B و C امتداد داده‌ایم تا خط داده شده‌ی l را به ترتیب در نقاط D و E قطع کنند. فرض کنید قرینه‌ی l نسبت به عمودمنصف BC نیز امتدادهای مذکور را به ترتیب در نقاط D' و E' قطع کند. ثابت کنید اگر $BD + CE = DE$ آنگاه $BD' + CE' = D'E'$

راه‌حل سؤالات مرحله دوم بیست‌ودومین المپیاد ریاضی کشور، سال ۱۳۹۰

۱- راه‌حل اول. طبق اصل لانه کبوتری از ۱۳۹۰ مورچه، لااقل ۶۹۵ مورچه یک‌طرف خط مفروض قرار دارند. فرض کنید این‌طرف بالای خط باشد. در ادامه تنها آن مورچه‌هایی را در نظر می‌گیریم که در بالای خط قرار دارند.

محور x را در جهت خط و محور y را عمود بر آن انتخاب می‌کنیم و فرض کنید که (x_i, y_i) نمایشگر مختصات سر یک مورچه در بالای محور باشد. در این صورت برای دو مورچه‌ی مختلف i و j داریم که:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq 2^2 = 4 \Rightarrow \ x_i - x_j\ ^2 \geq 4 - \ y_i - y_j\ ^2 \geq 3$$

لذا برای هر دو مورچه‌ای در بالای خط داریم که $x_i - x_j \geq \sqrt{3}$. پس اگر فرض کنیم که مورچه‌ها برحسب مختصه x مرتب‌شده‌اند، یعنی: $x_1 < x_2 < \dots x_3 < x_{695}$ داریم که فاصله‌ی هر دو عضو متوالی از دنباله‌ی فوق لااقل $\sqrt{3}$ است. پس $x_{695} - x_1 \geq \sqrt{3} \times 694 > 1200$ درنتیجه این دو مورچه در راستای x بیش از ۱۲ متر فاصله دارند پس کلاً فاصله‌ی آن‌ها بیش‌تر از ۱۲ متر است.

راه‌حل دوم. اگر به مرکز سر هر مورچه دایره‌ای به شعاع یک سانتی‌متر رسم کنیم، فرض مسئله‌ی معادل این می‌شود که هیچ دو دایره‌ای هم دیگر را قطع نمی‌کنند و همگی خط موردنظر را قطع می‌کنند (چرا؟) هم‌چنین این‌که همه‌ی دایره‌ها خط موردنظر را قطع می‌کنند نتیجه می‌دهد که همه دایره‌ها به‌کلی داخل نواری به پهنای ۴ به مرکزیت خط قرار می‌گیرند.

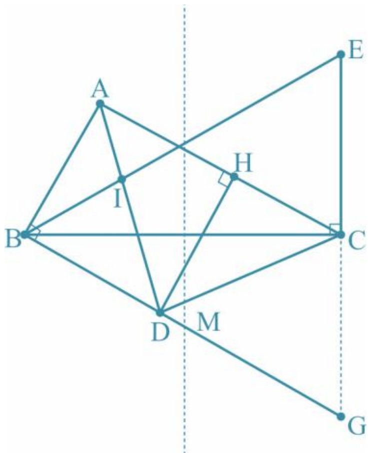
با فرض خلف اگر فرض کنیم که سر همه‌ی مورچه‌ها درون طول ۱۰۰۰ سانتی‌متر قرار می‌گیرد می‌توان نتیجه گرفت که طول ۱۰۰۲ از نوار موردنظر وجود دارد که همه دایره‌ها به‌کلی درون آن باشند. اما مساحت این ناحیه ۴۰۰۸ سانتی‌متر مربع است که از مجموع مساحت دایره‌های درون این ناحیه $(1390\pi \approx 4367)$ کم‌تر است و این تناقض است.

توضیح: راه‌حل‌های دیگری نیز برای این مسئله‌ی وجود دارد که کران‌های بهتری نیز می‌دهد.

۲- راه‌حل اول. مطابق شکل G را قرینه نقطه‌ی E نسبت به ضلع BC بگیرید. در این صورت BEG یک مثلث متساوی‌الساقین است (BE=BG) که یک زاویه‌ی ۶۰ درجه‌ی دارد.

$$(\angle EBG = 90^\circ - \frac{\angle ABC}{2} = 60^\circ)$$

پس این مثلث متساوی‌الاضلاع است. اگر M را وسط ضلع BG از این مثلث بگیریم با توجه به این‌که در مثلث متساوی‌الساقین میانه همان ارتفاع است، $EM \perp BG$ و درنتیجه $\angle BEM = 30^\circ$. پس کافی است نشان دهیم که $BD \leq BM$ برای این منظور توجه کنید که نقطه‌ی ی D روی نیم ساز زاویه‌ی $\angle A$ است. پس اگر H پای عمود وارد از D بر AC باشد، BD=DH. اما از طرف دیگر با توجه به این‌که DH بر AC عمود است، $DH \leq DC$. پس در کل $BD \leq DC$ این نشان می‌دهد که D و B در یک‌طرف عمودمنصف BC قرار دارند. اما می‌دانیم که عمودمنصف BC، طبق قضیه تالس BG را در نقطه‌ی وسطش یعنی M قطع می‌کند. درنتیجه D روی پاره‌خط BM قرار دارد و لذا $DB \leq BM$ و به‌این‌ترتیب اثبات به پایان می‌رسد.



راه‌حل دوم. مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث ABC که در اینجا محل تقاطع BE و AD است را مطابق معمول با I نمایش می‌دهیم α را برابر $\frac{1}{2}\angle BAC$ بگیرید. در این صورت داریم:

KLHDA LD NIDL. .. VH FVHFV.....بگیرید. در این صورت داریم:

$$\angle IBD = 90^\circ - \angle IBA = 90^\circ - \frac{CBA}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

$$\angle CEB = 90^\circ - \angle CBE = 90^\circ - \frac{CBA}{2} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$$

بنابراین در دو مثلث BEC و BED، $\angle CEB = \angle EBD = 60^\circ$ و BE ضلع مشترک هر دو است. ازآنجاکه $\angle EBC = 30^\circ$ است. کافی است نشان دهیم که $BD \le CE$ ولی می‌دانیم $\frac{BD}{AB} = \tan\alpha$ و $\frac{EC}{BC} = \tan(30^\circ)$ پس

$$\begin{aligned}BD \le CE &\Leftrightarrow AB\tan\alpha \le \tan 30^\circ\\ &\Leftrightarrow \frac{AB}{BC}.\tan\alpha \le 30^\circ\\ &\Leftrightarrow \tan\alpha\frac{\sin(120^\circ-2\alpha)}{\sin(2\alpha)} \le \tan 30^\circ\\ &\Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin(120^\circ-2\alpha)}{2\sin\alpha.\cos\alpha} \le \tan 30^\circ\\ &\Leftrightarrow \sin(120^\circ-2\alpha) \le 2\cos^2\alpha.\tan 30^\circ\\ &\Leftrightarrow (\sin 120^\circ.\cos(2\alpha) - \sin 120^\circ.\sin(2\alpha) \le\ 1+\cos(2\alpha)\ \ \tan 30^\circ\\ &\Leftrightarrow (\sin 120^\circ - \tan 30^\circ).\cos(2\alpha) - \cos 120^\circ.\sin(2\alpha) \le \tan 30^\circ\end{aligned}$$

حال برای نشان دادن این حکم معادل آخر نامساوی کوشی‌شوارتز استفاده می‌کنیم.

$$\begin{aligned}&((\sin 120^\circ - \tan 30^\circ).\cos(2\alpha) - \cos 120^\circ.\sin(2\alpha) \le \tan 30^\circ)^2\\ &\le ((\sin 120^\circ - \tan 30^\circ).\cos(2\alpha) - \cos 120^\circ.\sin(2\alpha) \le \tan 30^\circ)^2\\ &= (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3})^2 + (\frac{-1}{2})^2 = \frac{3}{36} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} = \tan^2(30^\circ)\end{aligned}$$

۳- ماخ ابتدا نشان می‌دهیم که این دنباله اکیداً صعودی است. برای این منظور به برهان خلف فرض کنید که برای یک عدد طبیعی i، $a_i = a_{i+1}$. حال برای یک عدد اول بزرگ مثل P، را برابر $P-i$ قرار دهید. در این صورت $i+j$ اول است و تنها دو مقسوم‌علیه دارد. پس $a_i + a_j$ هم تنها دو مقسوم‌علیه دارد و درنتیجه اول است. اما $a_{i+1} + a_j = a_i + a_j$ و لذا $a_{i+1} = a_j$ هم اول بوده و درنتیجه دو مقسوم‌علیه دارد. پس $i+j+1 = p+1$ هم اول است که امکان ندارد.

حال i و j را برابر 2^{p-2}. که p یک عدد اول است قرار دهید. در این صورت $i+j = 2^{p-1}$ p مقسوم‌علیه دارد.

پس تنها $2a_i$ هم باید P مقسوم‌علیه داشته باشد. حال اگر تجزیه‌ی $2a_i$. به عوامل به‌صورت $2^{a_1}\ p_2^{a_2}...p_s^{a_s}$ باشد، باید داشته باشیم:

$$(a_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_s+1) = p$$

پس تنها یکی از α_i+1ها می‌تواند بزرگ‌تر از یک باشد و آن‌هم به‌ناچار α_1+1 است. پس $\alpha_1 = p-1$ و درنتیجه $a_i = a_{2p-2} = 2^{p-2}$ حال دنباله‌ای اکیداً صعودی از اعداد صحیح داریم که در بی‌نهایت عدد صحیح مثل $a_k = k, k$ شده است. در این صورت این دنباله مجبور است برای هر عددی این خاصیت را داشته باشد. پس تنها دنباله‌ای که در این خاصیت صدق می‌کند دنباله‌ی اعداد طبیعی است.

۴- فرض کنید اعداد حقیقی $a_1, a_2, \ldots, a_n$ شرط مسئله‌ی را برآورده کنند. در این صورت:

$$20 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots a_n^2 < \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n} = n$$

پس $n \geq 21$ می‌خواهیم نشان دهیم که $n = 22$ جواب است. برای این منظور فرض کنید

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots a_{21}$$

تعدادی عدد حقیقی در بازه‌ی (۱،۱-) باشند که $a_1 + a_2 + \ldots a_{21} = 0$ و $a_1^2 + a_2^2 + a_{21}^2 = 20$، حال دقت کنید که $a_1 \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{21}}{21} \leq a_{21}$ پس $a_1 \leq 0 \leq a_{21}$ از طرفی با توجه به این‌که ۲۱ کوچک‌ترین عدد ممکن با این خاصیت است هیچ‌کدام از a_iها نمی‌توانند صفر باشند. بنابراین عدد طبیعی مشخص k وجود دارد که

$$-1 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_{k+1} \leq \ldots \leq a_{21<1}$$

اگر $k \leq 10$، آنگاه برای هر $k+1 \leq i \leq 21$ باید $0 < a_i < 1$ باشد و درنتیجه $0, a_i^2 < a_i$ حال داریم:

$$\begin{aligned}
20 = a_1^2 + a_2^3 + \ldots + a_{21}^2 &= (a_1^2 + \ldots + a_k^2) + (a_{k+1}^2 + \ldots + a_{21}^2)\\
&< (a_1^2 + \ldots + a_k^2) + (a_{k+1} + \ldots + a_{21})\\
&< (a_1^2 + \ldots + a_k^2) + (-a_1 - a_2 - \ldots - a_k)\\
&< 2k \leq 20
\end{aligned}$$

که یک تناقض است. اگر هم $k \geq 11$، با در نظر گرفتن دنباله‌ی $-a_i$ به‌جای a_i و تکرار استدلال بالا به تناقض می‌رسیم. پس n نمی‌تواند برابر ۲۱ باشد و لذا $n \geq 22$ برای $n = 22$ هم دنباله‌ی زیر شرایط خواسته‌شده را دارد.

$$a_1 = a_2 = \ldots a_{11} = -a_{12} = a_{13} = \ldots = -a_{22} = \sqrt{\frac{11}{10}}$$

پس پاسخ مسئله‌ی ۲۲ است.

۵- با استقرا روی n نشان می‌دهیم که حداکثر تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان برابر $2n - 1$ است. برای این تعداد روز اگر رنگ‌های مختلف را با شماره‌های $1, 2, \ldots, n$ نمایش دهیم، دنباله‌ی زیر از رنگ‌ها که طول آن برابر $2n - 1$ است به وضوح خاصیت خواسته‌شده را دارد.

$$(1, 2, \ldots, n-1, n, n-1, \ldots, 1)$$

در حالت $n = 1$ حکم کاملاً بدیهی است. حال فرض کنید که حکم برای اعداد کم‌تر از n درست باشد و می‌خواهیم حکم را در حالت n نتیجه بگیریم.

فرض کنید روز اول رنگین‌کمان R باشد و در k روز با شماره‌های $R_1, R_2, \ldots, R_K$ این رنگ را داشته است.(طبیعتاً $R_1 = 1$ است!)

حال هرکدام از بازه‌های (R_1, R_2)،(R_2, R_3)، (R_{K-1}, R_K) و $(R_{K_0}, \ldots)$را در نظر بگیرید. (منظور از بازه‌ی (R_i, R_{i+1}) روزهای بین روز R_iام و R_{i+1} است.) اگر پرنده در روز در دو بازه‌ی مختلف دارای یکرنگ باشد، فرض مسئله‌ی در مورد این دو روز و سروته بازه‌ی شامل روز اول به هم می‌خورد. بنابراین بازه‌های مختلف رنگ‌های مختلف دارند.

C_i را برابر تعداد رنگ‌هایی بگیرید که رنگین‌کمان در بازه‌ای که از روز R_i شروع می‌شود به خود می‌گیرد. طبق نتیجه‌ی بالا باید $\sum_{i=1}^{k} C_i = n - 1$ باشد. با توجه به این‌که $C_i < n$ طبق فرض استقرا تعداد روزهای بازه‌ای که از R_i شروع می‌شود حداکثر برابر $2C_i - 1$ است. تنها دقت کنید که تعداد روزهای بازه‌ی آخر ممکن است برابر صفر باشد که در این صورت تعداد کل روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k + \sum_{i-1}^{k-1}(2C_i - 1) = 2n - 1$ است. در غیر این صورت که تعداد نا صفر باشد تعداد روزهای عمر رنگین‌کمان حداکثر $k + \sum_{i=1}^{k}(2C_i - 1) = 2n - 2 < 2n - 1$ است.

۶- فرض کنید که M وسط ضلع BC و a عمودمنصف این ضلع باشد. X را نقطه‌ی ی تقاطع a و I بگیرید و به‌علاوه فرض کنید $\angle MXE = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, و$\angle ACB = \gamma$ باشد. Y را نقطه‌ای روی پاره‌خط DE بگیرید که EY=EC و Z قرینه نقطه‌ی Y نسبت به عمودمنصف BC باشد. (پس Z روی خط l' است.) در این صورت به‌وضوح چهارضلعی BCYZ یک ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین و درنتیجه یک چهارضلعی محاطی است. K را نقطه‌ی ی تقاطع دوم (غیر از Z) دایره‌ی محیطی این چهارضلعی با خط l' بگیرید. (اثبات در حالتی که این دایره بر l' مماس باشد کاملاً مشابه است. در این حالت K همان Z خواهد بود.) ادعا می‌کنیم که با این شرایط $D'B = D'K$ است.

$$\angle CED = ۳۶۰^\circ - (\angle MCE + \angle CMX + \angle MXE) = ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - y + ۹۰^\circ + \alpha) = ۹۰^\circ + y - \alpha$$

$$\Rightarrow \angle CYE = \frac{۱۸۰^\circ - \angle CED}{۲} - \frac{۱۸۰^\circ - ۹۰^\circ - \gamma + \alpha}{۲} = ۴۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲} \qquad (۱)$$

حال ازآنجاکه مثلث ZXY متساوی‌الساقین است، $\angle XYZ = ۹۰^\circ - \angle MXE = ۹۰^\circ - \alpha (۲)$

$$(۱),(۲) \Rightarrow \angle CYZ = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - \alpha) - (۴۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} - \frac{\alpha}{۲}) = ۴۵^\circ + \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲}$$

چهارضلعی CYKZ با توجه به نحوه‌ای که K را معرفی کردیم محاطی است و درنتیجه $\angle CKZ = \angle CYZ = ۴۵^\circ + \frac{\gamma}{۲} + \frac{\alpha}{۲}$. پس

$$\angle CKE' = ۱۸۰^\circ - \angle CKZ = ۱۳۵^\circ - \frac{\gamma}{۲} - \frac{\alpha}{۲} \qquad (۳)$$

$$\angle CE'K = ۳۶۰^\circ - (\angle MXE' + \angle XMC + \angle MXE')$$
$$= ۳۶۰^\circ - (۱۸۰^\circ - \gamma + ۹۰^\circ + ۱۸۰^\circ - \alpha) = \alpha + \gamma - ۹۰^\circ \quad (۴)$$

درنتیجه:

$$\angle KCE' = ۱۸۰^\circ - (\angle CE'K + \angle CKE') \overset{(۳),(۴)}{=} ۱۸۰^\circ - (\alpha + \gamma - ۹۰^\circ + ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲})$$
$$= ۱۳۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} - \frac{\gamma}{۲} = \angle CKE'$$
$$\Rightarrow \angle KCE' = \angle CKE'$$

پس نشان دادیم که مثلث $CE'K$ یک مثلث متساوی‌الساقین است و درنتیجه $CE' = KE'$ به طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $BD' = KD'$ و بنابراین در کل $D'E' = D'K + KE' = BD' + CE'$ و به‌این‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.